Απειροστικός Λογισμός Ι, 4/2/2019-Χρήστος Σαρόγλου

Επιλέξτε 10 από τις 11 μονάδες. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγιση δεν βαθμολογούνται.

Θέμα 1ο. Δίνεται το σύνολο $A = \left\{1 + \dfrac{2}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

i) [0.5 μον.] Να δειχθεί ότι το A δεν είναι κλειστό.

ii) [0.5 μον.] Να βρεθούν τα $\sup A$, $\inf A$.

Θέμα 2ο. [1 μον.] Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.
Να βρεθούν όλα τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής.

Θέμα 3ο. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $\xi \in (ab)$.

i) [0.75 μον.] Να δειχθεί ότι αν το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι θετικό, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in N_\delta(\xi) = (\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$, να ισχύει $f(x) > 0$.

ii) [0.75 μον.] Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο ξ.

Θέμα 4ο. [1 μον.] Να δειχθεί αποκλειστικά και μόνο με τον ορισμό του ορίου ότι $\lim_{x\to 3}(x^2 - 2) = 7$.

Θέμα 5ο. [0.5 μον.] Να αποδειχθεί ότι αν η f έχει φραγμένη παράγωγο στο (a,b), τότε είναι φραγμένη. [Υπόδειξη: Θεώρημα Μέσης Τιμής.]

Θέμα 6ο. [0.5 μον.] Να βρεθούν όλα τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Θέμα 7ο. [1 μον.] Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$a_n = \sqrt[n]{5^n + \frac{n}{n+1}(10)^n}, \qquad \beta_n = \frac{e^n}{n^2}, \qquad \gamma_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n+1}, \qquad \delta_n = \frac{n!}{2^n}.$$

Θέμα 8ο. [1 μον.] Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια και αν υπάρχουν, να βρεθούν.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2 + \frac{1}{2}\sin^2 x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cos x + 2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x \cos(\sin x)}{x}.$$

Θέμα 9ο. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

i) [0.5 μον.] Να δειχθεί ότι η f είναι φραγμένη.

ii) [1 μον.] Αν $f(0) < l$ και $f(0) < m$, να δειχθεί ότι η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Θέμα 10ο. [1 μον.] Έστω μία συγκλίνουσα ακολουθία $\{a_n\}$. Αν το σύνολο τιμών $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ της $\{a_n\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης, να δειχθεί ότι η $\{a_n\}$ είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $a_n = a_{n_0}$, για κάθε $n \geq n_0$.

Θέμα 11ο. [1 μον.] Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{|x|}\sin\frac{\pi}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
είναι παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$, με ασυνεχή παράγωγο.